4. Énoncés des exercices

Exercice 4.1
- Écrire la matrice $A = (a_{ij})$ de dimensions 3×3 dont les coefficients sont définis par :
  $\forall i \in [\![1;3]\!], j \in [\![1;3]\!], a_{ij} = i + j$
- Écrire la matrice $B = (b_{ij})$ de dimensions 2×3 dont les coefficients sont définis par :
  $\forall i \in [\![1;2]\!], j \in [\![1;3]\!], b_{ij} = 2^{i-j}$
- Écrire la matrice $C = (c_{ij})$ de dimensions 4×4 dont les coefficients sont définis par :
  $\forall i \in [\![1;4]\!], j \in [\![1;4]\!]$:
  $c_{ij} = |i - j|$ si $i \neq j$, et $c_{ij} = 0$ sinon.

Exercice 4.2 La matrice $B = (b_{ij})$ est telle que pour $1 \leq i \leq 2$ et $1 \leq j \leq 3$, $b_i j = -2i + 3j$.
Préciser la taille de cette matrice, puis l'écrire avec tous ses coefficients.

Exercice 4.3 On donne les vecteurs colonne suivants : $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Calculer les matrices suivantes :

1. $D = 5A$
2. $E = -B$
3. $F = 2A + B$

Exercice 4.4 On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. calculer les matrices suivantes :

1. $C = -3A$
2. $D = 4B$
3. $E = A + B$
4. $F = B - A$

Exercice 4.5 On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Exprimer les matrices suivantes sous la forme $\alpha A + \beta I$, où α et β sont deux réels.

1. $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
2. $N = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

Exercice 4.6 Effectuer les multiplications suivantes :
a. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$
c. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$
Il s'agit du **produit scalaire de deux vecteurs**.

Exercice 4.7 Dans chacun des cas suivants calculer le produit AB :

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exercice 4.8 Soient $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

1. Calculer les produits AB et BA
2. A-t-on $AB = BA$?

Exercice 4.9 On appelle **inverse** d'une matrice carrée A de taille n la matrice A^{-1} qui, si elle existe, vérifie :

$$AB = BA = I_n$$

Soient a et b deux réels non nuls tels que $a^2 + b^2 = 1$, et soient $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.
Démontrer que $AB = BA = I_2$. Conclure.

Exercice 4.10 On donne les matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$;
$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Les produits suivants ont-ils un sens ?
   $A \times B$; $\quad B \times A$; $\quad B \times C$; $\quad C \times B$
2. Calculer les produits qui ont un sens parmi ceux cités ci-dessus.
3. Retrouve-t-on les "identités remarquables" ?

Exercice 4.11 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
Déterminer une (ou plusieurs) matrice(s) carrée(s) B d'ordre 2, s'il en existe, telle(s) que $AB = BA$

Exercice 4.12 Soient a et b deux réels.
Posons $M_a = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$ et $M_b = \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$.
Démontrer que $M_a M_b = M_{a+b}$.

Exercice 4.13 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

1. Rappeler la définition d'une matrice inversible.
2. Démontrer que $AB = I_2$
3. Peut-on dire que A est inversible, d'inverse B ?

Exercice 4.14 Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n inversibles.
Démontrer que la matrice produit AB est inversible, d'inverse $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Exercice 4.15 Soient A, B, C trois matrices carrées d'ordre p.
Supposons que A est inversible.
Démontrer l'équivalence

$$(AB = AC) \Leftrightarrow (B = C)$$

Exercice 4.16 Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

1. Les matrices A, B, et $A + B$ sont-elles inversibles ?
2. Calculer A^{-1}, B^{-1}, et $(A + B)^{-1}$ si ces inverses existent.
3. La proposition suivante est-elle vraie ? Justifier la réponse.
   Si A et B sont deux matrices inversibles, alors leur somme est inversible, et $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.
4. Donner un exemple de matrices inversibles dont la somme ne l'est pas.

Exercice 4.17 Soit A_k la matrice carrée d'ordre 2 définie pour tout $k \in \mathbb{R}$ par $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A_k est inversible pour tout réel k.
2. Calculer A_k^{-1} pour tout $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.18 Soit M la matrice carrée d'ordre 2 définie pour tous réels a et b par $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de a et b la matrice M est-elle inversible ?

2. Calculer M^{-1} pour les valeurs de a et b déterminées dans la question précédente.

ÉNONCÉ On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & -2 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

Calculer 5A + 3B à la main. Vérifier en effectuant le calcul avec calculatrice .

SOLUTION

À la main : $5A = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 \\ 20 & 0 & 15 \\ -10 & 15 & 10 \end{pmatrix}$ et $3B = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 15 \\ 6 & 18 & -6 \\ 9 & 15 & -12 \end{pmatrix}$ donc $5A + 3B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 15 \\ 26 & 18 & 9 \\ -1 & 30 & -2 \end{pmatrix}$. On vérifie avec des outils TICE.

Sur TI-83 (ou TI-83 Premium CE)

• Entrer la matrice A en [A] :

Taper [2nde] [x^{-1}] (ou [matrice]) et choisir EDIT

Valider le choix 1 : [A] puis régler le format à 3 × 3 :

```
MATRICE[A] 3 ×3
```

Entrer les coefficients un par un en validant par [entrer] après chacun.

• Entrer de même la matrice B en [B].

• Taper

[5] [*] [2nde] [x^{-1}] [1] [+] [3] [×] [2nde] [x^{-1}] [2]

```
5*[A]+3*[B]
        [7   4  15]
        [26 18   9]
        [-1 30  -2]
```

Sur Casio Graph 35+

• Entrer la matrice A : dans le menu RUN MATH, choisir ▶MAT par [F3], sélectionner Mat A puis par [F3] choisir DIM et entrer le format :

```
m :3
n :3
```

Enter les coefficients en validant chacun par EXE.

• Entrer de même la matrice B.

• Taper le calcul ci-dessous, Mat s'obtenant par [OPTN] choix [F2] (MAT) puis [F1] (Mat).

```
5×Mat A+3×Mat B
        [7   4  15]
        [26 18   9]
        [-1 30  -2]
```

Exercice 4.19 Écrire ces systèmes, sans chercher à les résoudre, sous la forme d'une égalité matricielle $AX = B$, où A est une matrice carrée d'ordre 3, X et B deux vecteurs-colonnes :

1. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \\ 4x - y - 2z = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x - z = 1 \\ 3x - 5y + 2z = 0 \end{cases}$

Exercice 4.20 Pour chacun des systèmes ci-dessous :

- Écrire le système sous la forme d'une égalité matricielle $AX = B$, où A est une matrice carrée d'ordre 2, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et B un vecteur-colonne de dimension 2×1.
- Calculer le déterminant de la matrice A. Cette matrice est-elle inversible ? Si oui, calculer A^{-1}.
- Résoudre le système en utilisant le calcul matriciel.

1. $\begin{cases} 7x + 3y = -2 \\ -3x - 2y = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7x + 16y = 31 \\ 5x + 12y = 25 \end{cases}$

Exercice 4.21 Même si c'est un peu long, on peut calculer "à la main" l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 3 ou plus.

Soit par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, dont on admet qu'elle est inversible (*comment pourrait-on le vérifier ?*).

1. On pose $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ l'inverse de$A$.

Écrire le produit AB, et en déduire que si B est l'inverse de A, alors on a en particulier le système :
$\begin{cases} d-g=1 \\ a+3g=0 \\ a+d+g=0 \end{cases}$
En déduire les valeurs de a, d et g.

2. De la même manière, écrire un système d'inconnues b, e et h, et le résoudre.
3. Enfin, écrire un système d'inconnues c, f et i, et le résoudre.
4. On connaît à présent tous les coefficients de la matrice B. Calculer le produit BA et conclure.

Exercice 4.22 On se place dans l'espace muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère la famille de vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Partie A : Avec la méthode habituelle vue en Spécialité Maths :
Montrer que les vecteurs $\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}$ forment une base du plan : supposer qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ t.q.
$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$, et en montrer qu'alors on a nécessairement $\alpha = \beta = \gamma = 0$ (on devra pour cela résoudre un système de trois équations à trois inconnues).
Soit le vecteur $\vec{k}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Déterminer les réels a, b, c tels que $\vec{k} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$ (on devra encore résoudre un système de trois équations à trois inconnues).
Que représentent les réels a, b, c ?

Partie B : Avec une matrice de changement de base :

1. On rappelle qu'*une famille de vecteurs est libre ssi son déterminant est non nul*. Si la taille de cette famille est égale à la dimension de l'espace considéré, alors cette famille est une base de cet espace. Écrire la *matrice de changement de base* P, matrice carrée d'ordre 3 formée des vecteurs $\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}$ dont on écrira les coordonnées en colonnes, côte à côte. Démontrer que $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ est une base de l'espace.
Méthode :
Pour calculer le déterminant d'une matrice 3×3 (en l'occurrence le déterminant de P), on choisit une ligne ou une colonne (par exemple ici la 1ère colonne).
On multiplie chaque coefficient de cette colonne par le déterminant 2×2 obtenu en rayant la ligne et la colonne correspondant à ce coefficient.
On somme les trois termes obtenus, en multipliant par -1 si la ligne i et la colonne j sont telles que $i + j$ est impair.
On obtient :
$detP = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \times 0 \times \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-3) + 0 - 1 \times (-4) = -3 + 4 = 1$
Le déterminant est non nul, donc la famille est libre. Comme elle est de taille 3, c'est une base.
On pourra aussi utiliser la calculatrice pour calculer ce déterminant (c'est ce qui sera attendu au Bac).
2. On appellera $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ "ancienne base" et $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ "nouvelle base".
Écrire sous forme matricielle le système d'équations que l'on a résolu dans le cadre de "la méthode habituelle". En déduire que pour obtenir les coordonnées d'un vecteur $\vec{k}$ dans la "nouvelle base", il suffit de calculer le produit $P^{-1}k$.
Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{k}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la nouvelle base (on pourra utiliser la calculatrice pour inverser la matrice P). On notera $\vec{k'}$ le vecteur colonne obtenu.

On a , si P est la matrice de changement de base, $\vec{k} = P\vec{k'}$, et $\vec{k'} = P^{-1}\vec{k}$.

Exercice 4.23 On cherche des entiers naturels x et y tels que

$$(E) : x^2 - 7y^2 = 1$$

1. Une première approche
   (a) Montrer qu'il s'agit de chercher x et y entiers naturels tels que $x = \sqrt{7y^2 + 1}$

(b) Écrire un algorithme qui, pour y entier de 0 à 1000, calcule $x = \sqrt{7y^2+1}$, teste si x est un entier et affiche les couples solutions trouvés.

2. Traduction matricielle

(a) Montrer que si $(x;y)$ est un couple d'entiers naturels solutions de (E), le couple $(x';y')$ donné par $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 21 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est aussi un couple d'entiers naturels solutions de (E).

(b) En déduire un algorithme qui donne 10 couple solutions de (E) à partir de la solution $(1;0)$